

Introduction

Le traitement numérique du signal, (Digital Signal Processing ou DSP en anglais) est l'une des technologies les plus puissantes qui va modeler les techniques scientifiques et technologiques du 21^{ème} siècle.

Des changements révolutionnaires ont déjà eu lieu dans un large domaine d'applications : les communications, l'imagerie médicale, les techniques radar et sonar, les techniques de reproduction musicale et autres applications multimédia, la prospection pétrolière, pour n'en nommer que quelques-unes.

Chacun de ces domaines a développé en profondeur ses propres méthodes DSP, avec ses propres algorithmes, méthodes mathématiques et techniques spécialisées. Cette diversité fait qu'il est vain de prétendre appréhender l'ensemble de ces développements.

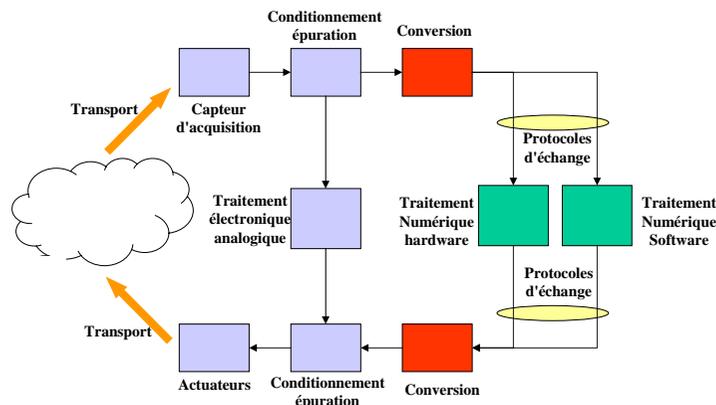
L'enseignement des techniques DSP implique deux tâches : l'apprentissage des concepts généraux applicables à l'ensemble du domaine, et l'initiation aux techniques spécialisées applicable à un champ d'intérêt particulier.

Ce chapitre présente un tour d'horizon du monde des techniques du traitement numérique du signal et des implications spectaculaires qu'elles ont eues dans divers domaines.

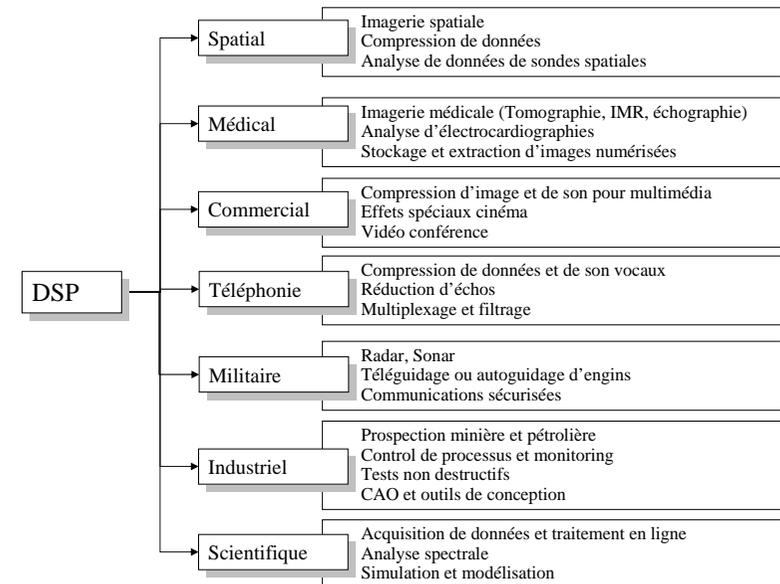
Les raisons d'être du traitement numérique du signal

Cours DSP

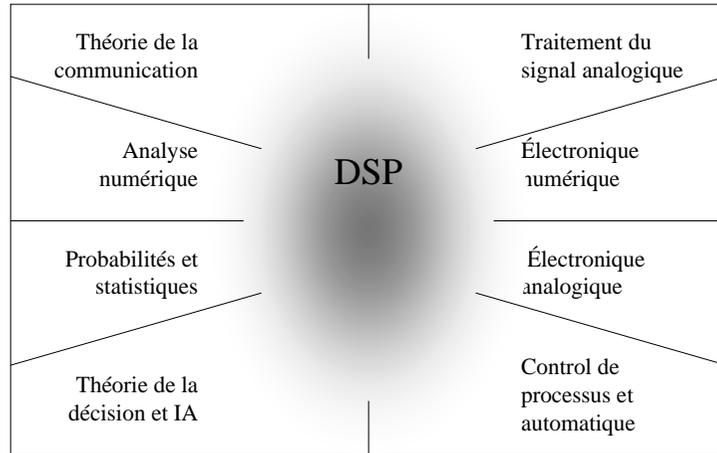
Principe du traitement numérique



Applications



Contexte



5

Télécommunications



Faire passer le maximum d'information par un canal

La fonction des télécommunications est de faire transiter des informations d'un point à un autre. Ces informations peuvent être des conversations téléphoniques, des signaux de télévision, des données informatiques, et d'autres types de données. Pour acheminer ces informations, il est nécessaire de disposer d'un *canal* entre les deux points. Ceci peut-être une paire de fils conducteurs, un signal hertzien, une fibre optique etc., et l'électronique associée. Les compagnies de télécommunication sont payées à la quantité d'information transférée et doivent en revanche payer la location ou la maintenance des canaux. La conséquence financière de cette équation est simple : faire passer un maximum d'information dans un minimum de temps et de canaux. La technologie DSP a bouleversé l'industrie des télécommunications : détection et émission de tonalité, décalage en fréquence, filtrage de bruit BF de ligne, etc.. Trois exemples seront discutés ce dessous : le multiplexage, la compression et le control d'écho.

Multiplexage
Compression
Control d'écho

6

Télécommunications

Multiplexage

Il y a environ un milliard de téléphones dans le monde. En quelques clics, vous voilà connecté en quelques secondes via le réseau commuté à n'importe lequel de ces postes. La tâche est immense ! Dans les années 60, la communication se faisait par l'intermédiaire de centraux analogiques réalisant la connexion effective des deux postes communicants par des paires de conducteurs. La technologie DSP commence par convertir les signaux analogiques en données numériques série. Comme il est facile d'intercaler puis de séparer des paquets de bits, il devient possible de transmettre plusieurs conversations sur un même canal. Par exemple, un standard téléphone connu sous le nom de *T-carrier* permet de transmettre simultanément 24 voies. Chaque voie est échantillonnée 8000 fois par seconde et convertie en valeur numérique sur 8 bits (numérisation logarithmique) . En conséquence, chaque voie est représentée par 64000 bits/s, et les 24 voies par canal par 1544 mégabits/s. Ce flux de données est compatible avec la bande passante d'une ligne téléphonique ordinaire (paire de conducteurs torsadée classique) sur une distance typique de 2 km. L'avantage financier d'une transmission numérique est énorme. Les câbles et les centraux commutés sont chers, l'électronique numérique est bon marché.

7

Télécommunications

Compression

A une fréquence d'échantillonnage de 8 kHz d'une conversation, une grande partie de l'information numérique est redondante. Cela signifie que l'information transportée par un échantillon est en grande partie dupliquée par les échantillons voisins. Des dizaines d'algorithmes DSP ont été développés pour numériser les signaux vocaux en un nombre réduit de bit/s. Ce sont des algorithmes de compression de donnée. Des algorithmes de décompression correspondants restituent un signal proche du signal original. Ces algorithmes se caractérisent par le taux de compression réalisé. En général, si l'on part d'un débit de 64 kilobits/s (24 canaux), une réduction à 32 kilobits/s n'engendre aucune détérioration audible de la qualité sonore du signal restitué. Quand le débit des données compressées atteint 8 kilobit/s, la qualité sonore est sensiblement amoindrie est encore acceptable pour des conversations à longue distance. Le taux de compression maximum pour la voix est de 2 kilobits/s, la voix est alors très distordue, mais encore utilisable pour certaines transmissions dans des conditions particulières (militaires, sous-marines).

8

Télécommunications

Control d'écho

Les échos sont une nuisance importante pour les connections téléphoniques à longue distance. Quand on parle dans un téléphone, une partie du signal représentant votre voix est réinjectée au niveau du terminal de votre correspondant et vous revient, engendrant un écho. Si la connexion est courte de quelques kilomètres, le délai de retour est de quelques millisecondes, ce qui n'est pas très gênant pour l'oreille, habituée à ce genre d'écho. Dans le cas d'une conversation longue distance, le délai devient très long (quelques secondes pour les connexions satellite intercontinentales) et peut être extrêmement irritant. Grâce aux technologies DSP, il est possible de réduire cet écho. La méthode consiste à mesurer le signal de retour et à engendrer un *anti-signal* (en opposition de phase) qui additionné à la voix de votre interlocuteur, va annuler l'écho. Similairement, on équipe les équipements porte-voix ou de sonorisation d'un système permettant d'éliminer l'effet «Larsen ». Encore plus spectaculaire et toujours sur le même principe, on trouve maintenant des équipements actifs réduisant de bruit acoustique, par exemple dans les carlingues de certains avions de ligne.

Traitement de signaux acoustiques

Les deux principaux sens sont la vision et l'audition. De même, une majorité des applications DSP concernent le traitement de l'image et le traitement des signaux sonores. Parmi ces derniers, on trouve la musique et la parole. Les technologies DSP jouent un rôle prépondérant dans chacun de ces secteurs.

Musique

La synthèse de la parole

La reconnaissance de la parole

Traitement de signaux acoustiques

Musique

La représentation numérique du signal est cruciale car elle permet de réduire sa dégradation lors du stockage, de la manipulation et de la reproduction analogique. Tout le monde peut s'en rendre compte en comparant la qualité d'écoute d'une cassette magnétique et d'un CD. Dans un studio d'enregistrement, on enregistre le son sur plusieurs canaux ou traces magnétiques, quelques fois même séparément pour chaque instrument. Ce scénario offre plus de flexibilité à l'ingénieur du son qui put ensuite combiner ces différentes voix pour réaliser le son final. Cette opération de « mixage » est enrichie par de nombreuses possibilités offertes par les technologies DSP : filtres, additions et soustractions de signaux, édition, etc..

Une application DSP fréquente pour la préparation musicale est celle de la *réverbération artificielle*. L'acoustique neutre du studio d'enregistrement n'est pas naturelle et sonne comme si la musique était jouée à l'extérieur. Il est possible grâce aux technologies DSP de rajouter un écho ou une réverbération artificielle et ajustable. Un écho avec un délai de quelques centaines de millisecondes produit un effet de cathédrale. Quelques dizaines de milliseconde suffisent pour produire l'impression d'une pièce de taille modeste

Traitement de signaux acoustiques

La synthèse de la parole

La synthèse et la reconnaissance de la parole sont un mode de communication entre la machine et l'homme. Au lieu d'utiliser vos yeux et vos mains, vous utilisez votre bouche et vos oreilles, et ce pendant que les premiers sont occupés à autre chose : conduire un véhicule, pratiquer une intervention chirurgicale, ou (malheureusement), actionner une arme. Deux approches sont utilisées pour produire la parole : la voix numérisée et la synthèse vocale à proprement parlé. La voix numérisée est une voix réelle enregistrée, numérisée, stockée sous forme compressée et restituée par éléments (mots, phrases...) composant un message. Un message d'une heure entière ne nécessite qu'environ 3 mégaoctets d'espace de stockage, largement à la portée d'un petit ordinateur. C'est la méthode la plus répandue pour fabriquer une voix numérique.

La *simulation de conduit vocal* va plus loin et elle s'attache à reproduire les mécanismes physiques du système vocal humain. Le larynx et la cavité buccale constituent une cavité résonnante de taille, de forme et donc de fréquence de résonance variable. Les cordes vocales sont excitées par le passage de l'air et font résonner cette cavité. Deux types de sons sont produits : les sons *fricatifs*, et les sons *voisés*. Avec les sons *voisés*, les cordes vocales produisent des ondes de pression quasi-périodiques dans la cavité. Les sons *fricatifs* sont eux produits par l'écoulement turbulent de l'air lors de son passage forcé au travers de restrictions produites par la langue, les lèvres et les dents. La synthèse vocale tente de produire un signal digital constitué de la simulation de ces deux genres de son. La cavité résonnante et les restrictions de l'appareil vocal sont simulés par des filtres aux caractéristiques spectrales similaires.

Traitement de signaux acoustiques

La reconnaissance de la parole

La reconnaissance de la parole est considérablement plus compliquée que sa synthèse. C'est l'exemple type de ce que le cerveau humain fait à merveille et de ce que l'ordinateur fait encore très mal. Les ordinateurs peuvent stocker et restituer une quantité énorme d'information, faire une grande quantité de calculs en un rien de temps et reproduire à l'infini une même tâche, mais sont bien inefficaces quand ils sont confrontés à l'interprétation de données physiques brutes.

En traitement numérique du signal, on décompose le problème de la reconnaissance vocale en plusieurs étapes : l'extraction d'éléments suivie de la reconnaissance d'éléments. Chaque mot ou phonème du signal audio est isolé puis analysé pour identifier le type d'excitation et les fréquences de résonance. Ces paramètres sont ensuite comparés à des exemples pré-analysés de mots pour identifier celui qui s'en rapproche le plus. Ces systèmes sont souvent limités à quelques centaines de mots, n'acceptent qu'on leur parle de façon articulée et en détachant bien les mots par une pause et doivent être re-entraînés dès qu'on change l'interlocuteur. C'est acceptable pour quelques applications commerciales mais bien modeste en comparaison des capacités humaines. Il reste énormément de travail dans ce domaine pour arriver à résultat, qui, n'en doutons pas, aurait de grandes répercussions sur notre environnement à tous.

La localisation d'écho

Une technique classique de repérage d'un objet lointain est de faire rebondir une onde dessus et d'en détecter l'écho. Le radar par exemple fonctionne en transmettant des ondes radio et en examinant le signal reçu sur la même fréquence. Le sonar utilise des ondes acoustiques transmises à travers l'eau. Les géologues localisent les couches de l'écorce terrestre de densité différente en provoquant des explosions et en écoutant leurs échos en différents points. En médecine, l'échographie procède sur le même principe en utilisant des ondes ultrasonores. Chacune de ces applications a des points communs et ces difficultés propres que la technologie DSP a grandement contribué à surmonter.

Radar

Sonar

Sismologie par réflexion

La localisation d'écho

Radar

Radar est un acronyme de RAdio Detection And Ranging. Le système radar le plus simple génère une impulsion radio de quelques microsecondes. Cette impulsion est transmise via une antenne hautement directionnelle qui émet une onde radio se propageant à la vitesse de la lumière. Un objet conducteur va réfléchir cette onde de façon plus ou moins omnidirectionnelle et une petite partie de l'énergie réfléchie va repartir en direction d'une antenne réceptrice qui va capter cet écho. La distance de l'installation à l'objet est trouvée simplement à partir du temps écoulé entre l'émission de l'impulsion et le retour de l'écho. L'orientation de l'antenne donne la direction.

La portée d'un système radar est déterminée par essentiellement deux paramètres : combien d'énergie dans l'impulsion initiale, et le niveau de bruit du récepteur radio. Augmenter l'énergie se fait généralement en rallongeant la durée de l'impulsion au détriment de la précision.

La technologie DSP a permis d'améliorer considérablement les performances des systèmes radar. Premièrement, un traitement adéquat permet de « compresser » l'impulsion après réception et de gagner en précision. D'autre part, il est possible de réduire le bruit par filtrage du signal reçu. Enfin, le traitement DSP permet une sélection et une synthèse rapide de différents type d'impulsion en variant la durée, la fréquence, le « chirp ». Cela permet une adaptation rapide à différents types de problèmes. Le plus impressionnant vient de ce que tout ceci est possible grâce à un échantillonnage aussi rapide que la gamme de fréquence utilisée : quelques centaines de mégahertz ! Quand il s'agit de radar, la vitesse de traitement prime sur la sophistication des algorithmes.

La localisation d'écho

Sonar

Sonar signifie SOund NAVigation and Ranging. On trouve deux types de techniques sonar : active et passive. Dans détection active, une impulsion acoustique est émise à une fréquence dans la gamme 2kHz à 40kHz, transmise par l'eau et réfléchi par les objets ou le fond. Les utilisations sont la détection et la localisation d'objets sous-marins, la navigation et la bathymétrie. La portée des systèmes sonar actifs est typiquement de 10 à 100 km. Au contraire, la technique sonar passive consiste uniquement en l'écoute des sons sous-marins. Ceux-ci sont produits par les turbulences naturelles, la vie sous-marine, le vent et la pluie, et aussi par les bruits mécaniques des vaisseaux de surface ou sous-marins. Aucune énergie n'est émise ce qui en fait la technique idéale de surveillance militaire pour détecter sans être détectable. Les fréquences utilisées sont très variables. A basse fréquence, certains phénomènes de guidage naturel des ondes acoustique permettent des portée de détection de plusieurs milliers de kilomètres.

Les technologies DSP ont révolutionné ce domaine un peu de la même façon que pour le radar : production d'impulsions, compression d'impulsion, filtrage des signaux détectés. D'une certaine façon, le sonar est moins complexe à traiter que le radar car les fréquences sont plus faibles. Mais par ailleurs, l'environnement est bien plus complexe et variable ce qui rend difficile l'extraction des informations du bruit. La technique utilisée par les systèmes sonar est basée sur l'utilisation de nombreux éléments émetteurs et récepteurs en matrice et en corrélant les signaux de ces nombreux capteurs en espace et en temps. Ceci permet la localisation de l'origine d'un écho et la réduction du bruit. La mise en corrélation de nombreux canaux nécessite une puissance de calcul DSP massive.

La localisation d'écho

Sismologie par réflexion

Dès les années 1920, les géophysiciens ont exploré la structure de l'écorce terrestre à l'aide d'ondes acoustiques. Les prospecteurs de l'époque faisaient exploser une charge et enregistraient les signaux de sismographes. L'analyse à l'œil des traces des sismographes leur permettait de repérer des couches profondes de plus de 10 km. Cette technique devint vite la principale méthode de prospection pétrolière et c'est encore le cas aujourd'hui.

Idéalement, l'impulsion transmise au sol n'engendre qu'un seul écho principal. La situation réelle n'est pas si simple. L'onde acoustique réfléchi traverse d'autres interfaces entre couches sur son trajet de retour et de nombreux échos secondaires sont produits par les rebonds de couche en couche. Ces échos secondaires peuvent rendre les signaux détectés très difficiles à interpréter. Le traitement numérique de ces signaux est devenu une chose courante à partir des années 1960 et ont permis de simplifier la détection des échos principaux dans le fond d'échos secondaires. Comment les pionniers se débrouillaient-ils pour faire la même chose à l'œil ? Tout simplement ils prospectaient des sites à la structure plus simple. La technologie DSP a simplement permis d'étendre l'étude à des situations plus difficiles, comme les fonds marins.

Le traitement de l'image

Les images sont des « signaux » aux caractéristiques bien particulières. D'abord, ils sont une mesure d'un paramètre en fonction de l'espace, alors que la plus part des signaux sont des mesures de paramètres par rapport au temps. Ensuite, elles contiennent généralement une très grande quantité d'information. Par exemple, plus de 10 Mégaoctets peuvent être nécessaire pour sauvegarder une seconde de vidéo. C'est plus de mille fois plus que pour la même durée de signal sonore. Enfin, le résultat final est souvent évalué par l'œil humain au jugement subjectif plutôt que sur des critères objectifs. Tout ceci fait du traitement de l'image un sous-groupe bien à part des techniques DSP

Médical

L'imagerie spatiale

Le traitement de l'image dans les produits commerciaux

Le traitement de l'image

Médical

En 1895, Wilhelm Conrad Röntgen découvre les rayons X et le fait que ceux-ci peuvent traverser une certaine quantité de matière. La pratique médicale a été révolutionnée par le fait qu'on a dès lors pu voir à l'intérieur du corps humain. Les appareils de radiographie se sont répandus à travers le monde en quelques années. Malgré son succès, la radiographie par rayons X s'est révélée être limitée par quatre problèmes, jusqu'à ce que les techniques de traitement numérique de l'image ne les surpassent à partir des années 70. Premièrement, les tissus corporels se recouvrent et se cachent les uns derrière les autres. Par exemple, une partie du cœur peut ne pas être visible derrière une côte. Ensuite, il n'est pas toujours possible de distinguer entre des tissus semblables. Ensuite, les radiographies dévoilent l'anatomie du corps, pas sa physiologie, c'est à dire le fonctionnement des organes. Enfin, et ce n'est pas le moindre des défauts, les rayons X sont nocifs et une exposition prolongée ou fréquente peut engendrer de grave danger pour la santé (cancer ...). L'exposition doit être réduite au minimum, la puissance du faisceau également, et le recours à la radiographie justifiée.

Le problème des structures corporelles se recouvrant fut résolu en 1971 avec l'introduction de la tomographie calculée (Computed Axial Tomographie, CAT ou CT). Le scanner CAT est un exemple classique d'application DSP. Les rayons X sont mis dans un plan et sous plusieurs angles, passent au travers d'une section du corps du patient et sont examinés. Les informations sont numérisées, transférées à un ordinateur et interprétées pour reconstruire une carte en 2 dimensions d'une « tranche » de la zone examinée. Ces images sont beaucoup plus détaillées que celle des techniques classiques et permettent un diagnostic plus précis. L'impact de la généralisation du scanner CAT fut presque aussi grand que l'introduction de la radiographie des débuts. Ceci valut un prix Nobel de médecine en 1979 à Godfrey N. Hounsfield et à Allan M. Cormack.

Les trois derniers inconvénients des rayons-X furent résolus par l'utilisation d'un autre type de rayonnement, non-ionisants et donc sans nocivité, tels que des ondes électromagnétique de plus grande longueur d'onde et des ondes acoustiques. Le DSP a joué un rôle clef dans tous ces cas. Par exemple, l'imagerie par Résonance Magnétique (IRM) utilise des champs magnétiques combinés avec des micro-ondes de faible puissance pour sonder l'intérieur du corps. En ajustant de façon très fine la force du champ magnétique et la fréquence de l'onde, on excite la fréquence propre de certains atomes entre des niveaux d'énergie quantique bien précis. La résonance est détectée par le fait qu'une partie infime de l'énergie transmise est absorbée et ré-émise. L'amplitude et la phase de ce signal sont mesurées et permettent de localiser la région de la résonance. La variation des valeurs du champ magnétique permet de balayer au travers du corps et de cartographier en 3D la structure interne. Cette somme d'information digérée, sont en général présentée sous la forme d'images en coupe. En plus de permettre une excellente discrimination entre différents types de tissus (tumeurs etc...) cette technique permet l'observation l'évolution de paramètres physiologiques, tels que les flux sanguins. L'IRM se base entièrement sur le traitement numérique du signal et ne pourrait exister sans lui.

Le traitement de l'image

L'imagerie spatiale

L'image prise au fin fond du système solaire est irremplaçable. Tout est donc fait pour en extraire un maximum d'information. L'imagerie spatiale est donc à la pointe du traitement d'image, ajustement de luminosité, de contraste, combinaison d'images, détection de comparaisons de plusieurs longueurs d'ondes, soustraction de bruit, ajustement de netteté, réduction de bougé, correction de distorsions sphériques, etc...

Le traitement de l'image dans les produits commerciaux

Les produits de grande distribution doivent avoir un coût concurrentiel se qui limite l'utilisation de mémoires de taille importante et de forts taux de transfert. La technique décisive est ici la compression d'image. Une image numérisée contient généralement une énorme proportion d'information redondante, qui une fois passé au travers d'algorithmes de compression, peut être réduite considérablement. Le traitement d'images animées (vidéo) est particulièrement intéressante car une majorité des pixels restes inchangés d'une image à la suivante. Les produits incorporant ces technologie sont omniprésents : téléphones vidéo, télévision digitale, format numérique vidéo (DV, MPEG etc...)

Signaux, bruits, statistique et probabilités

Cours DSP

Signaux et graphes : terminologie

Un **signal** décrit la **relation entre un paramètre et un autre paramètre**.

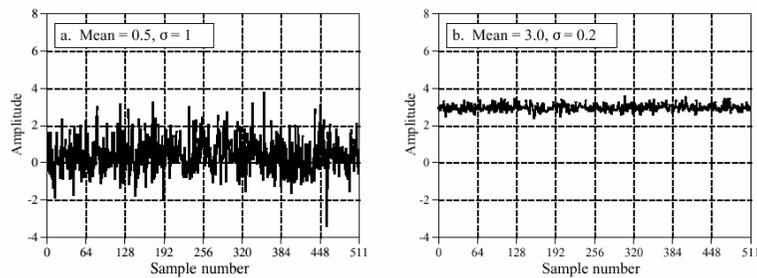
Par exemple en électronique, une tension électrique variant dans le temps. Comme chaque paramètre peut être considéré comme continu, nous appelons cela un **signal continu**.

Par opposition, passez ce même signal dans un échantillonneur convertisseur analogique-numérique. Chaque paramètre (la tension et le temps) sont alors **quantifiés**, c'est à dire qu'ils prennent des valeurs **discrètes discontinues**. Des signaux quantifiés de la sorte sont appelés **signaux discrets** ou **signaux numériques**.

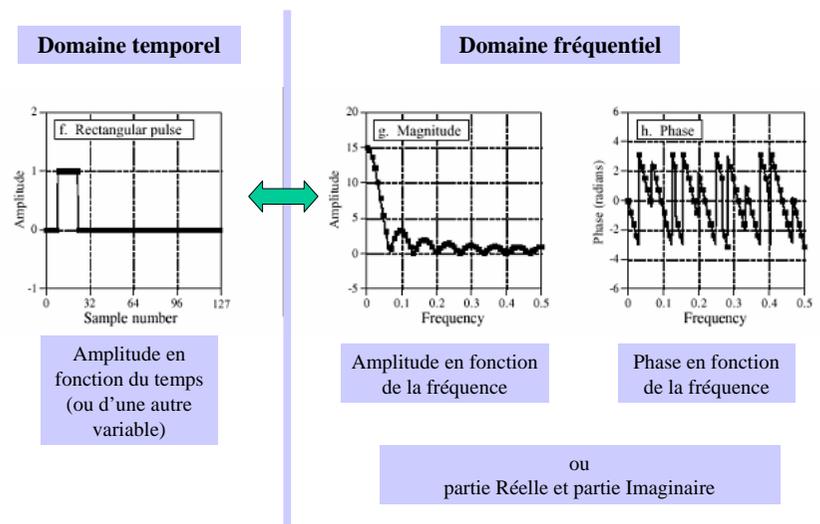
Nous utiliserons également l'anglicisme « **signal digital** » pour décrire des signaux dont les deux paramètres sont quantifiés.

La plus part du temps, les signaux continus sont présents dans la nature et les signaux discrets sont ceux utilisés par les ordinateurs.

Exemple de signaux discrets numériques ou signaux « digitaux »



Domaine Temporel – Domaine Fréquentiel



Calcul de la moyenne et de l'écart type

Moyenne:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i$$

Variance ou moyenne quadratique, carré de l'écart type ou déviation standard (ou RMS):

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \mu)^2$$

Exemple de programme

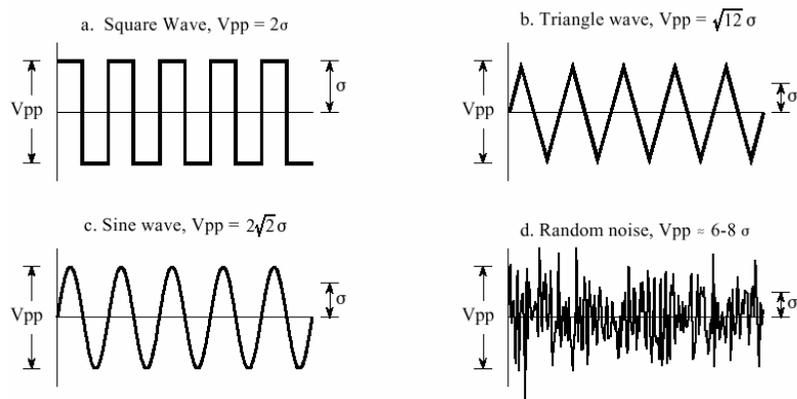
Implémentation du calcul de la moyenne et de l'écart type:

```

100 CALCULATION OF THE MEAN AND STANDARD DEVIATION
110 '
120 DIM X[511] 'The signal is held in X[0] to X[511]
130 N% = 512 'N% is the number of points in the signal
140 '
150 GOSUB XXXX 'Mythical subroutine that loads the signal into X[ ]
160 '
170 MEAN = 0 'Find the mean via Eq. 2-1
180 FOR I% = 0 TO N%-1
190 MEAN = MEAN + X[I%]
200 NEXT I%
210 MEAN = MEAN/N%
220 '
230 VARIANCE = 0 'Find the standard deviation via Eq. 2-2
240 FOR I% = 0 TO N%-1
250 VARIANCE = VARIANCE + ( X[I%] - MEAN )^2
260 NEXT I%
270 VARIANCE = VARIANCE/(N%-1)
280 SD = SQR(VARIANCE)
290 '
300 PRINT MEAN SD 'Print the calculated mean and standard deviation
310 '
320 END
    
```

Rapport entre amplitude et écart type

Le rapport entre l'amplitude de pic à pic V_{pp} et l'écart standard de plusieurs signaux types. Ce rapport vaut 2 pour un signal carré, $\sqrt{12} = 3,46$ pour un signal triangulaire, $2\sqrt{2} = 2,83$ pour un sinus. Pour un signal aléatoire, cela dépend du type de fluctuations.



Calcul de l'écart type - 2

Méthode plus rapide et plus précise pour le calcul de la variance et de l'écart type.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i \right)^2 \right]$$

soit

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \left[\text{somme des carrés} - \frac{\text{somme}^2}{N} \right]$$

... par opposition à :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \mu)^2$$

Exemple de programme

**Implémentation
du calcul de la
moyenne et de
l'écart type,
méthode rapide.**

```

100 'MEAN AND STANDARD DEVIATION USING RUNNING STATISTICS
110 '
120 DIM X[511] 'The signal is held in X[0] to X[511]
130 '
140 GOSUB XXXX 'Mythical subroutine that loads the signal into X[ ]
150 '
160 N% = 0 'Zero the three running parameters
170 SUM = 0
180 SUMSQUARES = 0
190 '
200 FOR I% = 0 TO 511 'Loop through each sample in the signal
210 '
220 N% = N% + 1 'Update the three parameters
230 SUM = SUM + X[I%]
240 SUMSQUARES = SUMSQUARES + X[I%]^2
250 '
260 MEAN = SUM/N% 'Calculate mean and standard deviation via Eq. 2-3
270 IF N% = 1 THEN SD = 0: GOTO 300
280 SD = SQR( (SUMSQUARES - SUM^2/N%) / (N%-1) )
290 '
300 PRINT MEAN SD 'Print the running mean and standard deviation
310 '
320 NEXT I%
330 '
340 END
    
```

29

Analyse statistique et analyse probabiliste

Attention!

**Bien distinguer entre
grandeur statistique
(propriété du signal)**

et

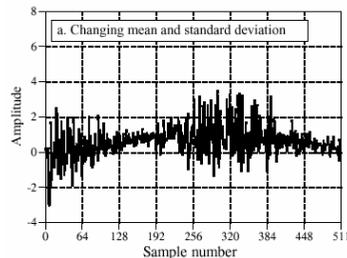
**grandeur probabiliste
(propriété du processus sous-jacent).**

La « moyenne » et la « variance » peuvent signifier des choses différentes, soit la moyenne et la variance statistique du signal, soit la moyenne et la variance au sens probabiliste du processus, les premières n'étant qu'une réalisation et qu'une mesure des secondes. Elles sont entachées d'une erreur statistique, typiquement:

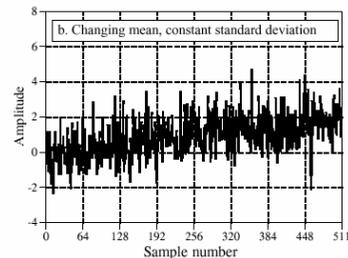
$$\text{Erreur sur la moyenne} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

30

Processus non-stationnaires



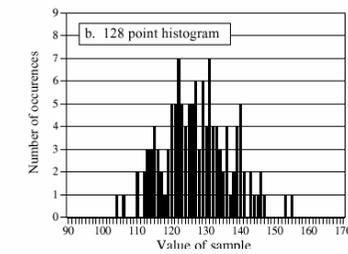
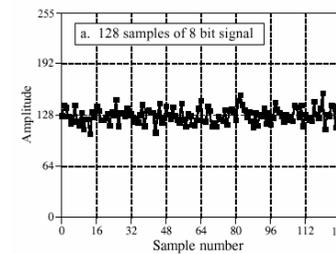
La moyenne et l'écart type changent.



L'écart type reste constant (égal à 1) et la moyenne change de 0 à 2.

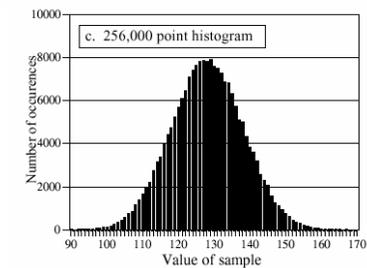
31

Histogrammes et densité de probabilité



Par construction:

$$N = \sum_{i=0}^{M-1} H_i$$



32

Histogrammes

Par construction:

$$N = \sum_{i=0}^{M-1} H_i$$

Calcul de la moyenne et de la variance à partir de l'histogramme:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{M-1} iH_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} (i - \mu)^2 H_i$$

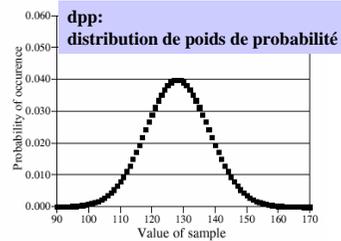
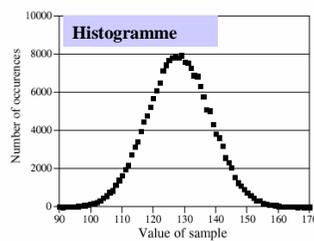
Exemple de programme

Implémentation du calcul de la moyenne et de l'écart type, à partir de l'histogramme.

```

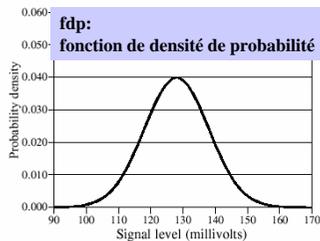
100 'CALCULATION OF THE HISTOGRAM, MEAN, AND STANDARD DEVIATION
110 '
120 DIM X%(25000) 'X%(0) to X%(25000) holds the signal being processed
130 DIM H%(255) 'H%(0) to H%(255) holds the histogram
140 N% = 25001 'Set the number of points in the signal
150 '
160 FOR I% = 0 TO 255 'Zero the histogram, so it can be used as an accumulator
170 H%(I%) = 0
180 NEXT I%
190 '
200 GOSUB XXXX 'Mythical subroutine that loads the signal into X% [
210 '
220 FOR I% = 0 TO 25000 'Calculate the histogram for 25001 points
230 H%( X%(I%) ] = H%( X%(I%) ] + 1
240 NEXT I%
250 '
260 MEAN = 0 'Calculate the mean via Eq. 2-6
270 FOR I% = 0 TO 255
280 MEAN = MEAN + I% * H%(I%)
290 NEXT I%
300 MEAN = MEAN / N%
310 '
320 VARIANCE = 0 'Calculate the standard deviation via Eq. 2-7
330 FOR I% = 0 TO 255
340 VARIANCE = VARIANCE + H%(I%) * (I%-MEAN)^2
350 NEXT I%
360 VARIANCE = VARIANCE / (N%-1)
370 SD = SQR(VARIANCE)
380 '
390 PRINT MEAN SD 'Print the calculated mean and standard deviation.
400 '
410 END
    
```

Histogramme et densité de probabilité



Rapports entre l'histogramme, la distribution des poids de probabilité et la fonction de densité de probabilité.

en français → en anglais
dpp → pmf
fdp → pdf



Générateurs pseudo-aléatoires uniforme

Fonctions intrinsèques :

par ex: Variable aléatoire uniforme x = RND en BASIC

Algorithme récursif simple : du type

$$R_n = (aR_{n-1} + b) \text{ mod } c$$

attention :

- Le choix des paramètres a, b et c est important pour la « qualité de hasard » engendré. Par exemple, prendre des valeurs de nombre premiers pour éviter les rebouclages.
- Il s'agit de nombres pseudo-aléatoire, avec une récurrences qui n'est pas nécessairement infinie et parfois insuffisante.

Générateurs pseudo-aléatoires normal ou Gaussien

X est une variable aléatoire normale, c.a.d de fdp gaussienne normalisée, de moyenne $\mu = 1$ et d'écart type $\sigma = 1$

En appliquant le théorème de la limite centrale :

$$X = \left(\sum_{i=1}^N R_i \right) - \frac{N}{2}$$

ou N est suffisamment grand, et ou les R_i sont des variables aléatoires uniformes indépendantes sur $[0,1]$. On ramène la moyenne à 0 en soustrayant $N/2$.

Algorithme (approché) n'utilisant que deux générateurs uniformes :

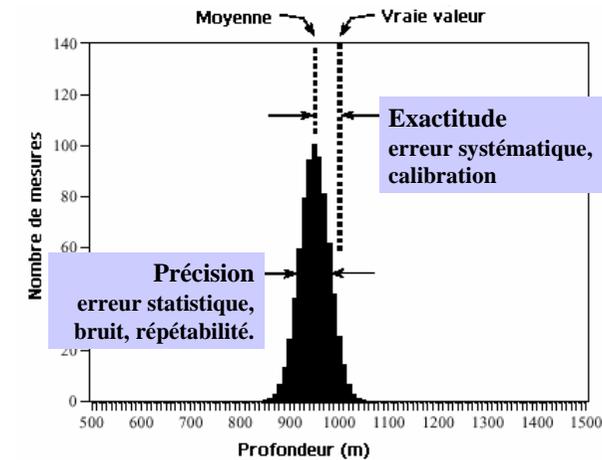
$$X = (-2 \ln R_1)^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi R_2)$$

ou R_1 et R_2 sont des variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$

Pour une variable aléatoire Y de moyenne μ et d'écart type σ quelconques, faire simplement : $Y = \sigma X + \mu$

37

Précision et Exactitude



38

Signaux, bruits, statistique et probabilités

Cours DSP

39

Signaux et graphes : terminologie

Un **signal** décrit la **relation entre un paramètre et un autre paramètre**.

Par exemple en électronique, une tension électrique variant dans le temps. Comme chaque paramètre peut être considéré comme continu, nous appelons cela un **signal continu**.

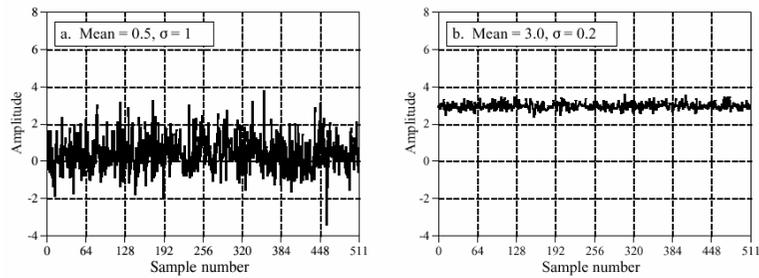
Par opposition, passez ce même signal dans un échantillonneur convertisseur analogique-numérique. Chaque paramètre (la tension et le temps) sont alors **quantifiés**, c'est à dire qu'ils prennent des valeurs **discrètes discontinues**. Des signaux quantifiés de la sorte sont appelés **signaux discrets** ou **signaux numériques**.

Nous utiliserons également l'anglicisme « **signal digital** » pour décrire des signaux dont les deux paramètres sont quantifiés.

La plus part du temps, les signaux continus sont présents dans la nature et les signaux discrets sont ceux utilisés par les ordinateurs.

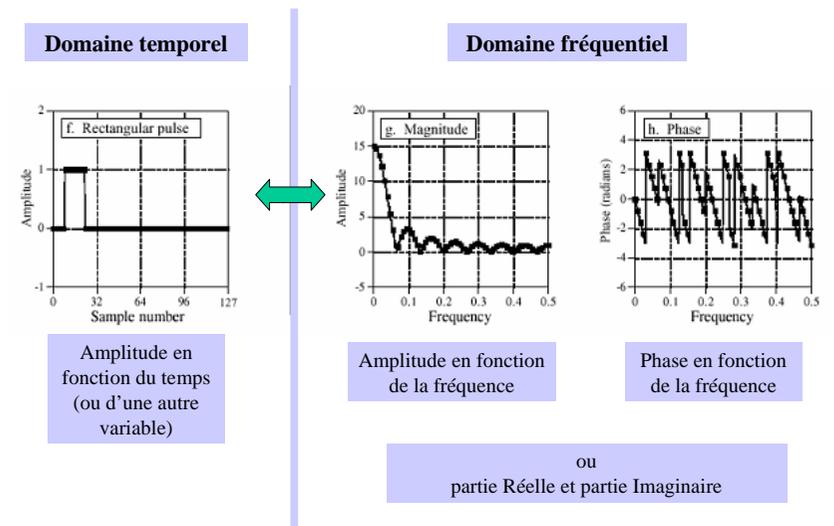
40

Exemple de signaux discrets numériques ou signaux « digitaux »



41

Domaine Temporel – Domaine Fréquentiel



42

Calcul de la moyenne et de l'écart type

Moyenne:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i$$

Variance ou moyenne quadratique, carré de l'écart type ou déviation standard (ou RMS):

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \mu)^2$$

43

Exemple de programme

Implémentation du calcul de la moyenne et de l'écart type:

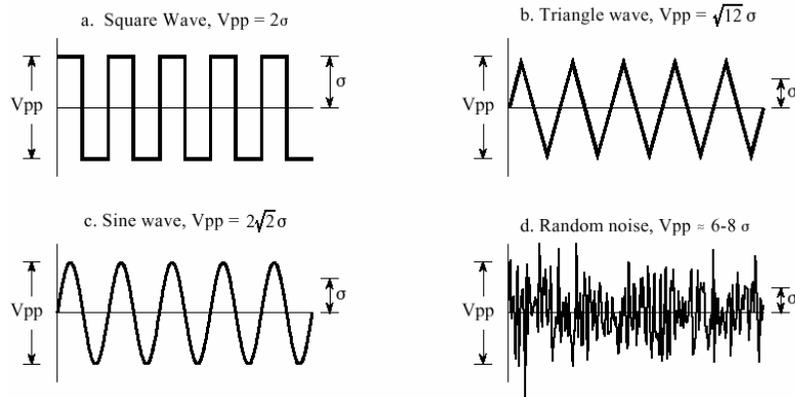
```

100 CALCULATION OF THE MEAN AND STANDARD DEVIATION
110 '
120 DIM X[511] 'The signal is held in X[0] to X[511]
130 N% = 512 'N% is the number of points in the signal
140 '
150 GOSUB XXXX 'Mythical subroutine that loads the signal into X[ ]
160 '
170 MEAN = 0 'Find the mean via Eq. 2-1
180 FOR I% = 0 TO N%-1
190 MEAN = MEAN + X[I%]
200 NEXT I%
210 MEAN = MEAN/N%
220 '
230 VARIANCE = 0 'Find the standard deviation via Eq. 2-2
240 FOR I% = 0 TO N%-1
250 VARIANCE = VARIANCE + ( X[I%] - MEAN )^2
260 NEXT I%
270 VARIANCE = VARIANCE/(N%-1)
280 SD = SQR(VARIANCE)
290 '
300 PRINT MEAN SD 'Print the calculated mean and standard deviation
310 '
320 END
    
```

44

Rapport entre amplitude et écart type

Le rapport entre l'amplitude de pic à pic V_{pp} et l'écart standard de plusieurs signaux types. Ce rapport vaut 2 pour un signal carré, $\sqrt{12}$ pour un signal triangulaire, $2\sqrt{2}$ pour un sinus. Pour un signal aléatoire, cela dépend du type de fluctuations.



45

Calcul de l'écart type - 2

Méthode plus rapide et plus précise pour le calcul de la variance et de l'écart type.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i \right)^2 \right]$$

soit

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \left[\text{somme des carrés} - \frac{\text{somme}^2}{N} \right]$$

... par opposition à :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \mu)^2$$

46

Exemple de programme

Implémentation du calcul de la moyenne et de l'écart type, méthode rapide.

```

100 'MEAN AND STANDARD DEVIATION USING RUNNING STATISTICS
110 '
120 DIM X[511] 'The signal is held in X[0] to X[511]
130 '
140 GOSUB XXXX 'Mythical subroutine that loads the signal into X[ ]
150 '
160 N% = 0 'Zero the three running parameters
170 SUM = 0
180 SUMSQUARES = 0
190 '
200 FOR I% = 0 TO 511 'Loop through each sample in the signal
210 '
220 N% = N% + 1 'Update the three parameters
230 SUM = SUM + X[I%]
240 SUMSQUARES = SUMSQUARES + X[I%]^2
250 '
260 MEAN = SUM/N% 'Calculate mean and standard deviation via Eq. 2-3
270 IF N% = 1 THEN SD = 0: GOTO 300
280 SD = SQR( (SUMSQUARES - SUM^2/N%) / (N%-1) )
290 '
300 PRINT MEAN SD 'Print the running mean and standard deviation
310 '
320 NEXT I%
330 '
340 END
    
```

47

Analyse statistique et analyse probabiliste

Attention!

Bien distinguer entre
grandeur statistique
 (propriété du **signal**)

et

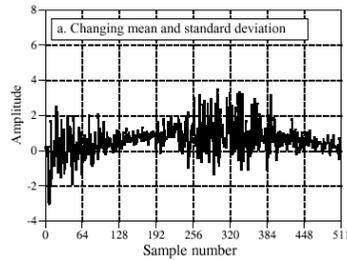
grandeur probabiliste
 (propriété du **processus sous-jacent**).

La « moyenne » et la « variance » peuvent signifier des choses différentes, soit la moyenne et la variance statistique du signal, soit la moyenne et la variance au sens probabiliste du processus, les premières n'étant qu'une réalisation et qu'une mesure des secondes. Elles sont entachées d'une erreur statistique, typiquement:

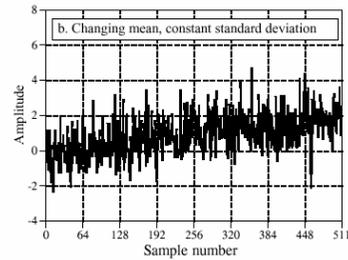
$$\text{Erreur sur la moyenne} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

48

Processus non-stationnaires

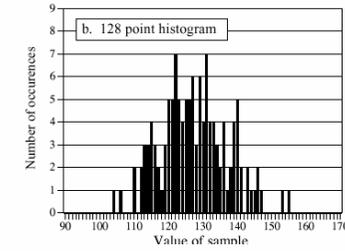
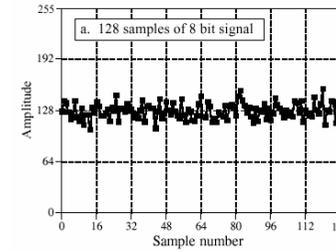


La moyenne et l'écart type changent.



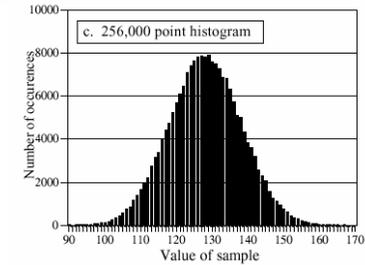
L'écart type reste constant (égal à 1) et la moyenne change de 0 à 2.

Histogrammes et densité de probabilité



Par construction:

$$N = \sum_{i=0}^{M-1} H_i$$



Histogrammes

Par construction:

$$N = \sum_{i=0}^{M-1} H_i$$

Calcul de la moyenne et de la variance à partir de l'histogramme:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{M-1} iH_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} (i - \mu)^2 H_i$$

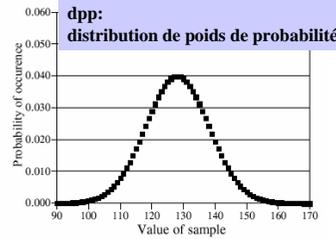
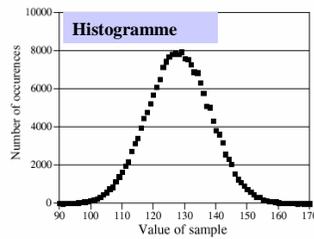
Exemple de programme

Implémentation du calcul de la moyenne et de l'écart type, à partir de l'histogramme.

```

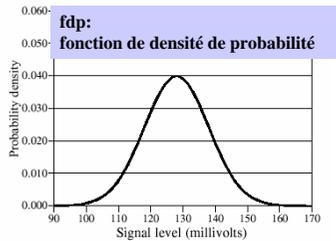
100 'CALCULATION OF THE HISTOGRAM, MEAN, AND STANDARD DEVIATION
110 '
120 DIM X%(25000) 'X%(0) to X%(25000) holds the signal being processed
130 DIM H%(255) 'H%(0) to H%(255) holds the histogram
140 N% = 25001 'Set the number of points in the signal
150 '
160 FOR I% = 0 TO 255 'Zero the histogram, so it can be used as an accumulator
170 H%(I%) = 0
180 NEXT I%
190 '
200 GOSUB XXXX 'Mythical subroutine that loads the signal into X% [ ]
210 '
220 FOR I% = 0 TO 25000 'Calculate the histogram for 25001 points
230 H% [ X% [ I% ] ] = H% [ X% [ I% ] ] + 1
240 NEXT I%
250 '
260 MEAN = 0 'Calculate the mean via Eq. 2-6
270 FOR I% = 0 TO 255
280 MEAN = MEAN + I% * H% [ I% ]
290 NEXT I%
300 MEAN = MEAN / N%
310 '
320 VARIANCE = 0 'Calculate the standard deviation via Eq. 2-7
330 FOR I% = 0 TO 255
340 VARIANCE = VARIANCE + H% [ I% ] * (I% - MEAN)^2
350 NEXT I%
360 VARIANCE = VARIANCE / (N% - 1)
370 SD = SQR(VARIANCE)
380 '
390 PRINT MEAN SD 'Print the calculated mean and standard deviation.
400 '
410 END
    
```

Histogramme et densité de probabilité



Rapports entre l'histogramme, la distribution des poids de probabilité et la fonction de densité de probabilité.

en français → en anglais
 dpp → pmf
 fdp → pdf



Générateurs pseudo-aléatoires uniforme

Fonctions intrinsèques :

par ex: Variable aléatoire uniforme $x = \text{RND}$ en BASIC

Algorithme récursif simple : du type

$$R_n = (aR_{n-1} + b) \text{ mod } c$$

attention :

- Le choix des paramètres a, b et c est important pour la « qualité de hasard » engendré. Par exemple, prendre des valeurs de nombre premiers pour éviter les rebouclages.
- Il s'agit de nombres pseudo-aléatoire, avec une récurrences qui n'est pas nécessairement infinie et parfois insuffisante.

Générateurs pseudo-aléatoires normal ou Gaussien

X est une variable aléatoire normale, c.a.d de fdp gaussienne normalisée, de moyenne $\mu = 1$ et d'écart type $\sigma = 1$

En appliquant le théorème de la limite centrale :

$$X = \left(\sum_{i=1}^N R_i \right) - \frac{N}{2}$$

ou N est suffisamment grand, et ou les R_i sont des variables aléatoires uniformes indépendantes sur $[0,1]$. On ramène la moyenne à 0 en soustrayant $N/2$.

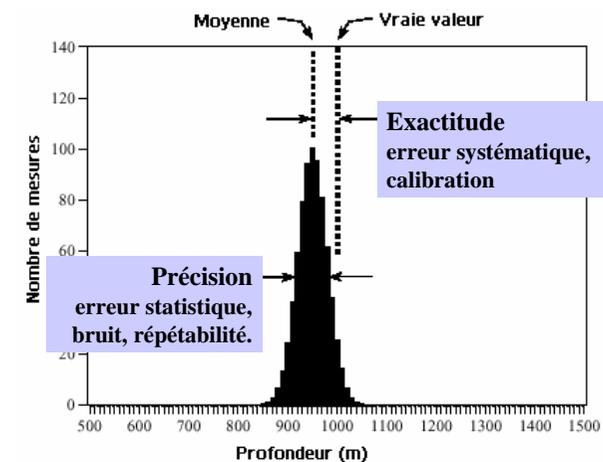
Algorithme (approché) n'utilisant que deux générateurs uniformes :

$$X = (-2 \ln R_1)^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi R_2)$$

ou R_1 et R_2 sont des variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$

Pour une variable aléatoire Y de moyenne μ et d'écart type σ quelconques, faire simplement : $Y = \sigma X + \mu$

Précision et Exactitude



Systemes lineaires

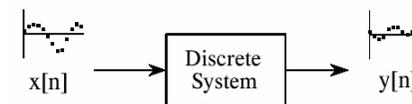
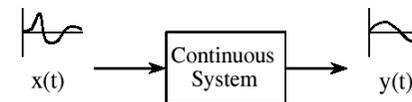
Cours DSP

Signaux et Systemes

Systeme:

Un processus qui produit un signal de sortie en reponse a un signal d'entree.

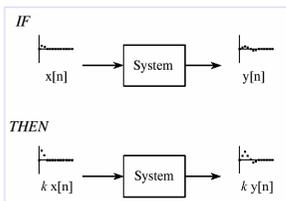
Systeme continu, systeme discret:



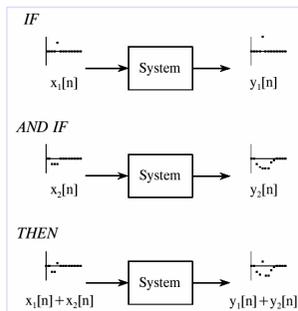
Signaux et Systemes

Systeme lineaire:

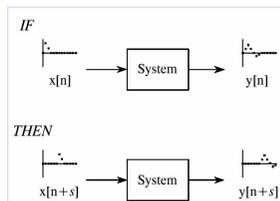
Homogeneite:



Additivite:

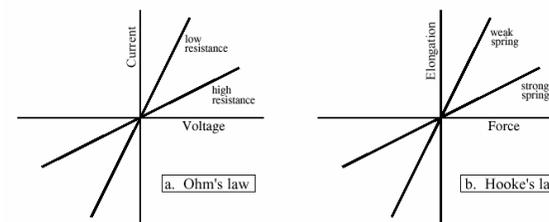


Invariance par decalage

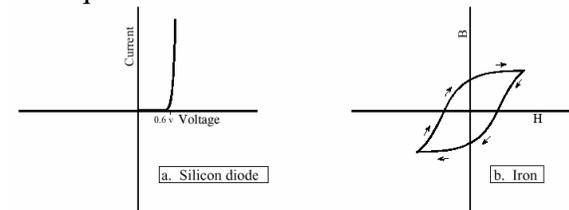


Linearite statique

Reponse statique lineaire:



Reponse statique non lineaire:



Exemples de systèmes linéaires et non-linéaires

Linéaire

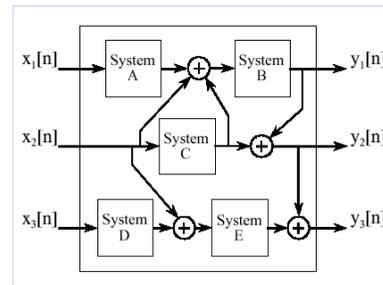
- Propagation d'ondes** telles que les ondes sonores ou électromagnétiques.
- Circuits électriques RLC**, amplis-op et filtres.
- Systèmes mécaniques** en mouvement comprenant masses, ressorts et amortisseurs.
- Systèmes décrits par des équations différentielles**
- Modifications de signaux** tel que échos, résonances et adoucissement d'image.
- Gains statiques** multiplication par une constantes.
- Système unité, système nul.**
- Différentiation, intégration**, différence première et somme pour les signaux digitaux.
- Petites perturbations** de systèmes non-linéaires, autour d'un point d'équilibre.
- Convolution.**
- Systèmes récurrents.**

Non-linéaire

- Système non-linéaire statiquement:** la puissance en fonction de la tension dans une résistance $P=V^2/R$; l'énergie rayonnée en fonction de la température $R=kT^4$; l'atténuation en fonction de l'épaisseur $I = e^{-\alpha x}$; etc.
- Systèmes sans fidélité sinusoïdale:** tels que redresseurs, convertisseurs signal sinus. signal carré, etc..
- Saturation et autres distorsions électronique courantes.**
- Multiplication d'un signal par un autre,** modulation d'amplitude et control de gain automatique.
- Phénomènes d'hystérésis,** magnétique, stress mécanique.
- Systèmes avec seuil.**

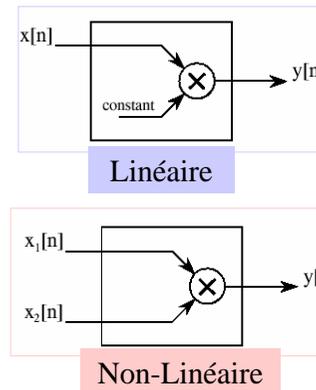
Propriétés des systèmes linéaires

Addition:



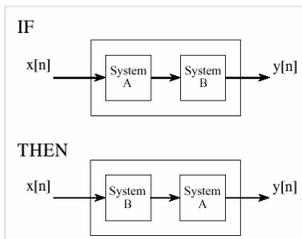
Tout système composé de systèmes linéaires et d'addition de signaux est linéaire.

Multiplication:

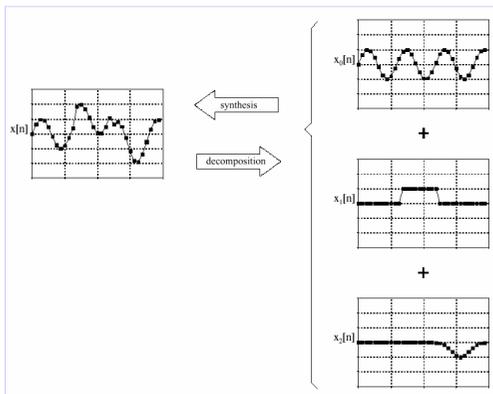


Propriétés des systèmes linéaires

Commutativité:

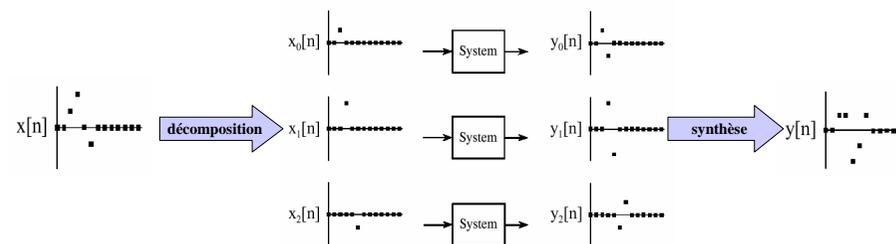


Superposition:



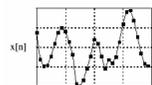
Propriétés des systèmes linéaires

Superposition décomposition et synthèse

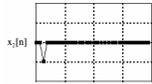
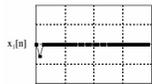


Décompositions

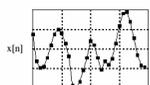
Impulsionnelle



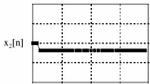
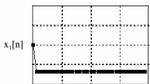
Impulse Decomposition ↓



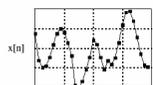
Indicielle



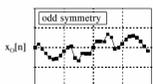
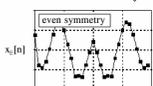
Step Decomposition ↓



Symétrique/ Antisymétrique



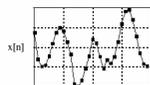
Even/Odd Decomposition ↓



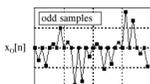
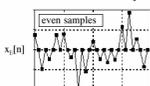
$$x_{\text{paire}}[n] = \frac{x[n] + x[N-n]}{2}$$

$$x_{\text{impaire}}[n] = \frac{x[n] - x[N-n]}{2}$$

Entrelacée



Interlaced Decomposition ↓



Décomposition de Fourier

